1038. Fandiño Pinilla, M. I., & D'Amore, B. (2023). Reflexiones histórico-críticas y didácticas sobre la idea de ángulo. *Paradigma*, *44*(2), 297-315.
http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_serial&pid=1011-2251&lng=es&nrm=iso

REFLEXIONES HISTÓRICO-CRÍTICAS Y DIDÁCTICAS SOBRE LA IDEA DE ÁNGULO

Martha Isabel Fandiño Pinilla[1]
marisafp@hotmail.it
ORCID: 0000-0002-1592-9918

Bruno D'Amore[1 2 3]
bruno.damore@unibo.it
ORCID: 0000-0002-5834-9438

[1] Nucleo di Ricerca in Didattica della matematica dell'Università di Bologna (Italia)
[2] Accademia delle Scienze di Bologna (Italia)
[3] Doctorado Interinstitucional de la Universidad Francisco José de Caldas, Bogotá (Colombia)

Recibido: 15/02/2023 **Aceptado:** 25/04/2023

Resumen
Se presenta la historia de la evolución de la definición y, por tanto, del concepto, del objeto geométrico "ángulo". Esta evolución es muy poco conocida y presenta aspectos inesperados, dado que, en la Antigüedad, la idea de ángulo distaba mucho de la actual. La revisión de David Hilbert de 1899, si bien condujo a una reformulación revolucionaria de la geometría de Euclides, no parece haber resuelto el problema del ángulo con una definición adecuada. Todo esto lleva a consideraciones didácticas: si el concepto ha tenido una historia tan controvertida y compleja a lo largo de los milenios, esto significa que el concepto de ángulo es uno de esos objetos difíciles de comprender para el estudiante y que pertenece a los que Guy Brousseau ha llamado "obstáculos epistemológicos".
Palabras clave: Ángulo, Historia Del Concepto De Ángulo, Tipologías De Ángulo, Obstáculos En El Aprendizaje.

HISTORICAL-CRITICAL AND DIDACTIC REFLECTIONS ABOUT THE IDEA OF ANGLE

Abstract
We present the history of the evolution of the definition and thus the concept of the geometric object "angle" is presented. This evolution is very little known and presents quite unexpected aspects, given that, in antiquity, the idea of an angle was far removed from today. David Hilbert's 1899 revision, while it led to a revolutionary reformulation of Euclid's geometry, does not seem to have solved the problem of the angle with a suitable definition. All this leads to didactic considerations: if the concept has had such a controversial and complex history over the millennia, this means that the concept of angle is one of those terms that are difficult for the student

to understand and fall into what Guy Brousseau called "epistemological obstacles".
***Keywords**:* Angle, History of The Angle Concept, Types of Angles, Obstacles in Learning.

REFLEXÕES HISTÓRICO-CRÍTICAS E DIDÁTICAS SOBRE A IDEIA DE ÂNGULO

Resumo
É apresentada a história da evolução da definição e, portanto, do conceito, do objeto geométrico "ângulo". Esta evolução é muito pouco conhecida e apresenta aspetos inesperados, visto que, na Antiguidade, a ideia de ângulo era muito diferente da atual. A revisão de David Hilbert de 1899, embora levando a uma reformulação revolucionária da geometria de Euclides, não parece ter resolvido o problema do ângulo com uma definição adequada. Tudo isso leva a considerações didáticas: se o conceito teve uma história tão controversa e complexa ao longo dos milênios, isso significa que o conceito de ângulo é um daqueles objetos de difícil compreensão para o aluno e que pertence àqueles que Guy Brousseau chamou de "obstáculos epistemológicos".
Palavras-chave: Ângulo, História do Conceito de Ângulo, Tipos de Ângulos, Obstáculos na Aprendizagem

RIFLESSIONI STORICO-CRITICHE E DIDATTICHE SULL'IDEA DI ANGOLO

Riassunto
Si presenta la storia dell'evoluzione della definizione e dunque del concetto dell'oggetto geometrico "angolo". Tale evoluzione è assai poco conosciuta e presenta aspetti del tutto inattesi, dato che, nell'antichità, l'idea di angolo era assai lontana dalle attuali. La revisione di David Hilbert del 1899, mentre ha portato a una rivoluzionaria riformulazione della geometria di Euclide, non sembra aver risolto il problema dell'angolo con una definizione opportuna. Tutto ciò porta a considerazioni didattiche: se quell'oggetto ha avuto nei millenni una storia così controversa e complessa, ciò significa che il concetto di angolo fa parte di quei termini di difficile comprensione da parte dell'allievo che rientrano in quelli che Guy Brousseau ha definito "ostacoli epistemologici".
Parole chiave: Angolo, Storia del Concetto di Angolo, Tipologie di Angolo, Ostacoli Nell'apprendimento.

Introducción

Italia tiene una gran tradición en el campo de la llamada "matemática elemental": basta pensar en la obra de Giuseppe Peano (1958 – 1932) y en la de Federigo Enriques (1871 – 1946). Como consagración académica definitiva de este hecho, uno de los cursos fundamentales del año final de los estudios para obtener el título en Matemática (dirección didáctica)[1] lleva precisamente el nombre de «Matemática elemental desde un punto de vista superior». Es difícil establecer cuál es el programa típico de un curso de este tipo, ya que la

[1] En Italia para obtener este título hay tres programas: Matemática general, aplicada, didáctica.

propia idea de "matemática elemental" es imposible de definir (mientras que, por el contrario, nos parece bastante intuitivo lo que podría significar la expresión "desde un punto de vista superior"). Sin embargo, "matemática elemental" *no* significa "matemática sencilla" o "para la escuela primaria", como algunos ingenuamente podrían creer. El adjetivo "elemental" hace referencia al sustantivo "elemento" y, por tanto, "matemática elemental" significa "estudio de los elementos sobre los cuales se basa la matemática" (Klein, 2004).

Esto podría llevar a pensar que se trata de matemática trivial, inútil, dispersiva; quienes piensan esto coinciden con quienes creen (y son muchos) que los elementos sobre los que descansa la Matemática han sido desde siempre los mismos y que desde los comienzos de la civilización hasta el presente nada se ha modificado.

Entraremos en detalle de esta cuestión con un ejemplo significativo; examinando un término de la Geometría que hoy se considera elemental y comprobando que su aceptación en el mundo matemático no ha sido para nada inmediata e inquebrantable. Nuestra elección ha recaído en el concepto de *ángulo*, un término indudablemente elemental que todos, matemático o no, utilizan y creen poseer con cierta confianza.

Actualmente, en algunos cursos escolares de secundaria (6º a 8º curso) de diferentes países, el ángulo convexo (cóncavo) se define como la intersección (unión) de dos semiplanos cuyos orígenes no son paralelos.

En otros textos, en cambio, un ángulo es cada una de las dos regiones (del plano) en las cuales el plano queda dividido por dos semirrectas que tienen el mismo origen.

También hay quien define un ángulo como una parte ilimitada de un plano encerrada entre dos semirrectas que tienen el origen en común, afirmación más compleja que la anterior, aunque claramente inspirada en esta (la adición del adjetivo "ilimitada" la hace más pretenciosa).

Revisamos ahora algunas de las distintas definiciones que se utilizan en la enseñanza secundaria (9º a 13º curso):

a) un ángulo es la rotación de una semirrecta alrededor de su origen;
b) un ángulo es la intersección de dos semiplanos con orígenes no paralelos (aquí nos referimos al ángulo convexo; el ángulo cóncavo será su unión);
c) un ángulo es un par de semirrectas que tienen el mismo origen.

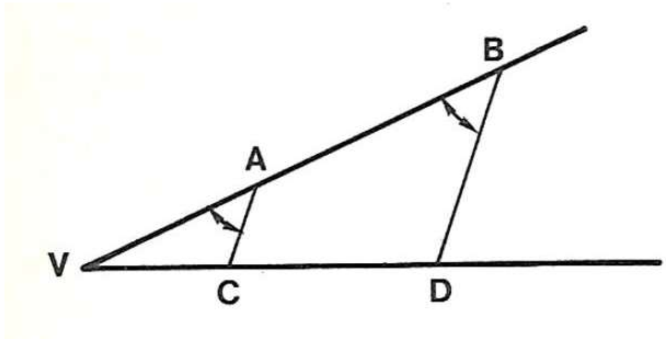
Terminado este breve (e incompleto) repaso de las definiciones elementales del concepto de "ángulo", y habiendo preferido cada uno de nosotros la que más le gusta, una pregunta nos parece prioritaria y natural: ¿la definición de ángulo dada por los matemáticos en la Antigüedad era ya una de éstas? En la época de Tales (s. -VII − -VI) y luego de Euclides (s. -III) y de nuevo de Proclus (s. V), ¿cuál de estas definiciones se utilizaba? ¿Cuál era la más utilizada entre los matemáticos?

No nos parece ocioso observar que, por elemental que sea la cuestión, ni siquiera en aquellos tiempos (y estamos hablando de un panorama de varios siglos) existía una definición única de ángulo; es más, según nuestro punto de vista moderno, no existía ninguna definición de ángulo y el estudio de las magnitudes relativas (elemental para nosotros hoy) era muy vago y, en verdad, poco ... elemental.

Es bien sabido que los testimonios, anteriores al siglo -III, del conocimiento matemático en Grecia, son escasos y dispersos; los encontramos principalmente en las citas de comentaristas y en los recuerdos de matemáticos posteriores (más generalmente científicos, más aún filósofos). Así, cuando citamos una "definición de Tales", por ejemplo, esto significa realmente que hay un filósofo que la relata de oídas, pero varios siglos más tarde. No disponemos de ninguna obra atribuible a Tales que haya llegado hasta nosotros, por lo cual lo único que podemos hacer es recopilar estas citas posteriores. A favor de la aceptabilidad de las mismas, podemos decir que son muchas las que se refieren a ideas bastante similares atribuidas al mismo personaje. Pero no siempre es así: en el caso de Pitágoras (-575 apr. − -495 apr.), por ejemplo, no es posible tomar al pie de la letra todos los testimonios, ya que son demasiado discordantes y distantes en el tiempo.

(Parece entonces que) Tales afirmaba que dos ángulos rectilíneos iguales eran "homoios" (semejantes). Esto llevó a los dos grandes estudiosos de la matemática griega antigua, Zeuthen (1912) y Enriques (1925), a suponer que la idea de ángulos rectilíneos superponibles derivaba del concepto de semejanza. En la Figura 1, es decir, los ángulos VAC y VBD para Tales son *semejantes* (para nosotros son *iguales* o *congruentes*) ya que se corresponden en una semejanza (en términos modernos: en una homotecia).

Figura 1: Ángulos semejantes en Tales.



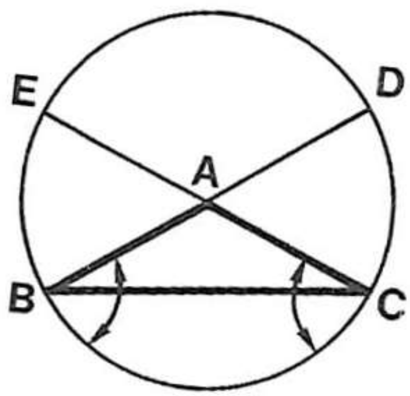
Fuente propia.

Según el testimonio de Proclus (412 – 485) (*Elementos*, Libro I, 5ª prop.) y Aristóteles (-384 apr. – -382) (*Analytica Priora*, I, 24, 41b 13-22), Tales fue el primero en demostrar la conocida propiedad que sigue:

> si en un triángulo dos lados son iguales entonces dos de sus ángulos también lo son. (D'Amore, 1985)

Nótese, sin embargo: en la siguiente demostración se consideran indistintamente ángulos rectilíneos y mixtilíneos; además, ahora y en lo que sigue, se utilizan figuras que no aparecen en los textos originales y que hemos añadido nosotros para facilitar la comprensión del lector.

Veamos la demostración de Proclus. (D'Amore, 1985)

> Se sigua la Figura 2, en la cual el triángulo ABC tiene dos lados iguales (AB y AC, radios de la misma circunferencia con centro A).
>
> **Figura 2**
>
> 
>
>
> Consideremos el ángulo mixtilíneo ECB así hecho: de E a A a C a lo largo de la recta EC y luego de C a B a lo largo del arco de circunferencia CB. Consideremos a continuación el ángulo mixtilíneo análogo DBC: de D a A a B a lo largo de la recta DB y luego de B a C a lo largo del arco BC. Dichos dos ángulos mixtilíneos son iguales porque las dos semicircunferencias ECB y DBC de las cuales se deducen son iguales [se trata de un teorema demostrado anteriormente

> utilizando la simetría]. Además, el ángulo mixtilíneo que se identifica por el segmento BC y el arco CB es igual al ángulo mixtilíneo que se identifica por el segmento CB y el arco BC [esto también es un teorema previamente demostrado por simetría]. Por tanto, por diferencia, los ángulos ACB y ABC del triángulo ABC son iguales, como queríamos demostrar.

En la época de Tales se utilizaba el concepto de "ángulo curvilíneo", es decir, un ángulo que tiene uno o los dos "lados" que no son rectilíneos. Esto era fuente de diversas complicaciones, entre las cuales no hay que subestimar las terminológicas (nosotros mismos tuvimos que esforzarnos para describir los ángulos que queríamos tratar). Incluso en Euclides (-III s.), el ángulo curvilíneo no se excluye de la definición de ángulo, aunque en el uso se limite sólo a los ángulos rectilíneos (aparte de la proposición XVI del III libro de los *Elementos*). Pero veremos con más detalle la posición de Euclides en su época.

En su historia escolástica, cada uno de nosotros recordamos que, una vez definida la idea de ángulo, inmediatamente se compararon los ángulos entre sí, estableciendo lo que significaban los adjetivos: agudo y obtuso.

En Platón (-428 apr. – -348 apr.), estas dos ideas pueden rastrearse en varias ocasiones en sus *Diálogos*; allí encontramos también la distinción entre ángulo plano y sólido (para nosotros, el ángulo plano se construye por dos rectas secantes en el plano; el "anguloide", o ángulo sólido, es detectado por planos que pasan todos por el mismo punto (vértice del ángulo) del espacio; pensemos, por ejemplo, en el vértice de una pirámide y en la parte del espacio "encerrada" entre las caras de la pirámide que pasan por el vértice de la pirámide, pensando naturalmente en caras no limitadas. En Platón, sin embargo, no se encuentran definiciones de tales objetos geométricos.

Interesante, aunque a los ojos de una persona moderna resulte una rareza, es la definición de ángulo que dan el gran matemático Apolonio (-262 apr. – -190 apr.) y el astrónomo, poeta y matemático Herón (I s.), para quienes "ángulo" es «una contracción de una superficie o de un sólido en un sólo punto bajo una línea quebrada o una superficie».

Disponiendo sólo de extractos divulgados por otros, es difícil imaginar lo que los dos griegos tenían en mente por la palabra "contracción". Pero el hecho de que el ángulo fuera de alguna manera una "irregularidad" en el curso de un fenómeno o trayectoria también está presente en Eudemo de Pérgamo (II s.) para quien el ángulo es la «ruptura de una línea». Tal vez se puedan unificar las dos formas de ver pensando en una línea (o una superficie) sin evolución irregular y, por tanto, sin "angulosidad" y, a la inversa, en sus cambios bruscos de dirección. Estos cambios son los que darían lugar a los "ángulos".

Y llegamos al gran Euclides. Es bien sabido que en la lista de sus "términos" (en griego "*oroi*": se puede pensar, más que en definiciones, en una lista comentada, puesta al inicio, de los términos técnicos que se utilizarán sin explicita definición en los *Elementos*) dos de ellos se refieren al ángulo:

> VIII: Ángulo plano es la inclinación recíproca de dos líneas que, en un plano, tienen un extremo en común y que no están en la dirección la una de la otra.
>
> IX: Cuando las líneas que forman el ángulo son segmentos prolongables, el ángulo es rectilíneo.

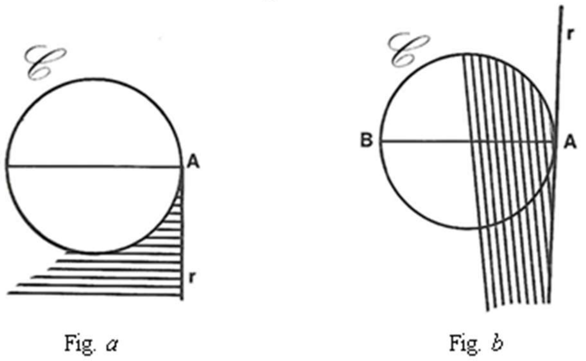
Nótese que la proposición VIII limita la consideración del ángulo plano y excluye los casos del ángulo llano, nulo y completo, ya que se exige explícitamente que las dos rectas que limitan el ángulo recto *no* deben estar una en la dirección de la otra, es decir, diríamos hoy, no deben tener la misma dirección.

Sin embargo, en el Libro III, la proposición XVI dice:

> XVI: En un círculo, un segmento que sea trazado perpendicular al diámetro del círculo partiendo de un extremo del círculo, caerá fuera del círculo; ningún otro segmento puede situarse en el espacio [entre] el segmento perpendicular y el círculo, y el ángulo del semicírculo es mayor y el que queda es menor que cualquier ángulo rectilíneo.

Considérese la Figura 3.

Figura 3



Sea C el círculo, AB un diámetro, y r el segmento (para nosotros: semirrecta) por A perpendicular a AB. Para la XVI, r es todo exterior al círculo; en el "ángulo" comprendido entre r y el arco (ángulo curvilíneo exterior al círculo, rayado en a) no cabe ninguna semirrecta y, por tanto, este ángulo es menor que cualquier ángulo rectilíneo dado. El ángulo compreso entre r y el arco (rayado en b) es mayor que cualquier ángulo rectilíneo dado (esto se debe a que Euclides sólo considera ángulos menores a los ángulos planos, como decimos en terminología moderna).

Dejemos a un lado la demostración (fácil) que se encuentra en Euclides y limitémonos a constatar la presencia de un ángulo (mixtilíneo) menor que cualquier ángulo rectilíneo, ya que este tema es muy interesante para desarrollos posteriores de la matemática (Carruccio, 1972). De hecho, un principio básico de la matemática de las magnitudes es el llamado "postulado de Eudoxo-Arquímedes" [Eudoxo (-408 apr. – -354 apr.), Arquímedes (-287 apr. – -212)], que podemos enunciar de la siguiente manera:

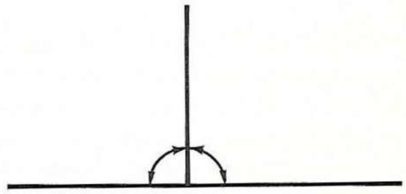
> I. Dadas dos magnitudes homogéneas A y B supongamos que A sea mayor que B; pues bien, postulemos que existe un número natural n tal que n veces la magnitud B sea una nueva magnitud (homogénea con aquellas), que denotamos por nB, mayor que A.
>
> II. En las mismas condiciones, existe un número natural m tal que $\frac{1}{m}$A es menor que B.

Ahora bien, si B es el ángulo evidenciado en la Figura 3 y A es un ángulo rectilíneo cualquiera, dividiendo A en *m* partes, por el postulado anterior deberíamos, para *m* suficientemente grande, encontrar un ángulo (rectilíneo: porque dividiendo un ángulo rectilíneo en *m* partes seguimos teniendo un ángulo rectilíneo) menor que B. Pero esto es imposible según el XVI del libro III de Euclides. Por lo tanto, hemos comprobado que en el conjunto de cantidades "ángulos rectilíneos y mixtilíneos juntos", el postulado de Eudoxo - Arquímedes (cuya apariencia parece totalmente aceptable intuitivamente) *no* se aplica. Ya hemos dedicado un artículo especial a este ángulo mostrado en la Figura 3a (que más tarde asumió el nombre de "ángulo de contingencia") y a los desarrollos históricos posteriores a su estudio, al que remitimos al lector interesado (D'Amore, 1981).

Así pues, al estudiar Euclides, se puede prever una ruptura en el estudio de los ángulos y una necesaria división entre ángulos rectilíneos y no rectilíneos, con el lento pero inexorable abandono de estos últimos.

Para terminar con los ángulos en Euclides, recordemos de nuevo que en el oros (es decir "termino") X Euclides llama "rectos" a los ángulos que son iguales cuando «están formados por un segmento y por otro segmento elevado sobre él» (Figura 4); en este caso, los dos segmentos se llaman perpendiculares. Los ángulos rectos gozan también del privilegio de un postulado, el Postulado IV, en el cual se exige que «todos los ángulos rectos sean iguales entre sí».

Figura 4

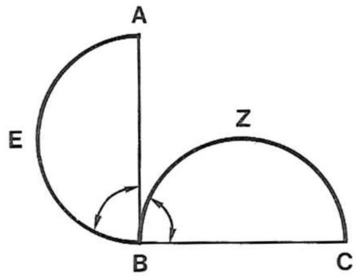


Finalmente desplacémonos cronológicamente a Euclides, para ver cómo evolucionó su definición. Entre los matemáticos más destacados de los primeros siglos posteriores al año 0, encontramos una extraña definición de tipo implícito en Carpo de Antioquía (activo entre el siglo -II y el II): el ángulo sería la «distancia de las líneas y de las superficies que lo incluyen». Ese "lo" se refiere al término "ángulo" (que motiva nuestro uso del adjetivo "implícito"). Según Carpo, por tanto, cuanto mayor sea la amplitud del ángulo, más distantes estarán los lados entre sí (pero no se sabe a qué distancia del vértice debe tomarse tal medida).

En el siglo III encontramos al gran matemático griego Pappus (290 apr. – 350 apr.), a quien se reconoce como autor, entre otros, de este interesante teorema:

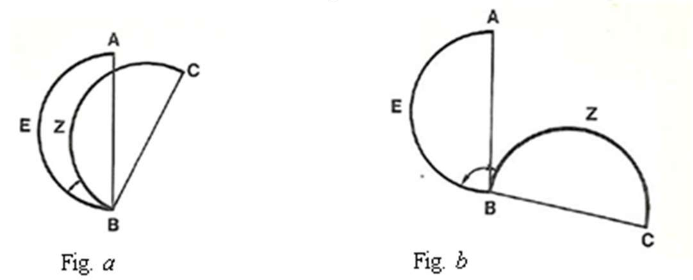
> No es cierto que un ángulo igual a un ángulo recto sea en sí mismo un ángulo recto. (D'Amore, 1985)

Sigamos su demostración (sigamos las letras del propio Pappus pero no exactamente su terminología):

> Consideremos la **Figura 5**:
>
> 
>
>
> En la Figura 5, consideremos los dos segmentos AB y BC iguales y mutuamente perpendiculares; sean ABE y BCZ dos semicircunferencias iguales, dispuestos como en la figura.
>
> Como las dos semicircunferencias son iguales, el ángulo incluido entre el arco EB y el diámetro BA es igual al ángulo comprendido entre el arco ZB y el diámetro BC. Añadamos a estos dos ángulos el ángulo incluido entre el diámetro AB y el arco BZ. Tenemos así que el ángulo recto ABC (rectilíneo) es igual al ángulo (mixtilíneo) incluido entre el arco EB y el arco BZ, que no es recto, como se quería demostrar.

Pappus señala explícitamente que esta situación ya no se produce (de ahí que su teorema no sea válido) si se excluye la consideración de los ángulos curvilíneos. Por tanto, parece partidario de abandonar el ángulo curvilíneo en el estudio de los ángulos. Sin embargo, señala que es posible, con figuras similares a las anteriores, ampliar las ideas de ángulos agudos y obtusos haciendo rotar adecuadamente la semicircunferencia BCZ alrededor de B (Figura 6, *a* y *b*).

Figura 6



Por último, cabe mencionar a Plutarco (V siglo); él afirma que el ángulo es un «intervalo bajo un punto» que, aunque sea una frase de significado obscuro, parece estar relacionada con las ideas de Apolonio, Herón y Eudemo.

Un parágrafo aparte merece Proclus (412 – 486), cuya vida estuvo enteramente dedicada al estudio de la geometría y cuya obra principal (Proclus, 1873) es precisamente un comentario a los *Elementos* de Euclides.

Sin embargo, no hay que creer que el *Comentario* en cuestión es un mero texto de notas: Proclus introduce ideas muy importantes que entonces se atribuían a veces erróneamente a Euclides y que, en cualquier caso, superaban incluso la importancia de las que se limitaba a comentar. Escribir textos de este tipo estaba muy en boga en la antigüedad, ya que la obra de Euclides parecía el máximo de la perfección geométrica. Es bien sabido que Herón, Porfirio, Ptolomeo, Apolonio, Teón, Pappus y muchos otros ilustres matemáticos fueron autores de numerosas y notables obras similares; pero la importancia histórica del *Comentario* de Proclus, aparte de la riqueza de su contenido, se debe a un hecho especifico nada desdeñable: ¡el suyo es el único *Comentario* antiguo que ha sobrevivido original hasta nuestros días!

Pasemos, pues, a la definición de ángulo que se encuentra en Proclus:

> VIII: «Un ángulo plano es la inclinación de dos líneas que tienen un extremo en común en un plano y que no se yacen en dirección la una de la otra». (Proclus, 1873)

Como puede verse, no hay grandes innovaciones con respecto a la idea euclidiana; se incluyen los ángulos curvilíneos y se excluyen ángulos planos, nulos y completos; además, la definición se basa toda en el oscuro término "inclinación".

Para comprender el siguiente pasaje que tomamos de la obra de Proclus, es necesario dar un paso sustancial hacia atrás y adentrarse en el espíritu pitagórico que todavía estaba muy presente en el siglo V. Según esta escuela filosófica, en efecto, la Matemática es una "ciencia doble", ya que puede dividirse en: a) ciencia de las cualidades en sí mismas, b) ciencia de las cantidades. A su vez, la ciencia de las cualidades es dual: a1) cualidades en sí mismas, a2) cualidades en relación con otras; así la ciencia de las cantidades puede ser: b1) en reposo, b2) en movimiento. Proclus se pregunta: ¿a cuál de estas cuatro categorías pertenece el concepto de ángulo? Y responde:

> «Aquellos entre los antiguos que pusieron el ángulo en la categoría de lo que está en relación con algo dicen que el ángulo es una inclinación de líneas o de planos inclinados uno hacia el otro; otros, sin embargo, que entienden esto también en su cualidad como lo que es recto o lo que es curvo lo llaman un modo de ser de una superficie o de un sólido; aquellos finalmente que se refieren a la cantidad admiten que [al ángulo] es una superficie o un sólido. Pues eso [el ángulo] en la superficie está dividido por una línea y en un sólido por una superficie. Pero lo que está dividido por estas cosas, dicen, no es más que una cantidad, y ésta no es lineal [es decir: no es una línea, dado que la línea está dividida en dos partes por un punto]: queda, pues, que esa cantidad es una superficie o un sólido». (Proclus, 1873)

Puede relevarse que, quizá por primera vez, aparece la idea de que un ángulo plano es una superficie (mientras que el anguloide es una parte del espacio) con consideraciones que hoy en día se pueden llamar de carácter topológico.

Continuaremos este apartado citando exclusivamente el *Comentario* de Proclus con brevísimos comentarios nuestros.

Sobre el ángulo de contingencia:

> «Pero si [el ángulo] es una cantidad, pues todas las cantidades finitas de la misma naturaleza tienen relación entre sí, y también todos los ángulos del mismo tipo, por lo tanto, tendrán relación entre sí, de modo que incluso el ángulo comprendido entre un arco [de circunferencia] y su tangente a un extremo del diámetro con respecto al ángulo rectilíneo [tendrán relación entre sí]. Pero las cosas que tienen relación entre sí, multiplicadas, pueden superarse recíprocamente. Por tanto, a veces el ángulo incluido entre un arco y la tangente a un extremo del diámetro excederá al ángulo rectilíneo: lo cual es imposible; pues está demostrado que [el ángulo 'de contingencia'] es menor que cualquier ángulo rectilíneo». (Proclus, 1873)

Aquí Proclus se refiere evidentemente a la proposición XVI del Libro III de los *Elementos* de Euclides, ya examinada anteriormente. Esto le lleva a excluir que el ángulo sea una cantidad; por tanto, permanece la hipótesis de que el ángulo sea una cualidad:

> «Y si es sólo una cualidad como el calor y el frío, ¿cómo es divisible en partes iguales? Pues la igualdad y la desigualdad no son menos propias de

los ángulos que de las cantidades, y la divisibilidad se da para unos y otros de manera absolutamente análoga. Por tanto, si las cosas a las que esto sucede de manera absolutamente análoga son cantidades y no cualidades, es evidente que los ángulos tampoco pueden ser cualidades; pues un modo natural de ser de la cualidad es el más y el menos y no la igualdad y la desigualdad. Por tanto, no debemos decir ángulos desiguales y uno mayor y otro menor, sino que son diferentes y que uno es más ángulo y el otro menos ángulo. Pero está claro para todos que esta [manera de decir] es contraria a la esencia de la matemática. Pues cada ángulo recibe la misma definición y no es uno más ángulo y el otro menos. En tercer lugar, si el ángulo es inclinación y concierne completamente a cosas que están relacionadas con otras cosas, seguirá que, puesto que la inclinación es sólo una, el ángulo es sólo uno y no varios. Pues si el ángulo no es más que una disposición de líneas y planos, ¿qué necesidad es que haya una sola disposición y varios ángulos? Si te imaginas un cono cortado por el vértice hasta la base por un triángulo, en el semicono hacia el vértice verás una sola inclinación de las líneas del triángulo, y dos ángulos distintos, uno plano, él del propio triángulo, y el otro sobre la superficie mixta del cono, ambos contenidos por las citadas líneas». (Proclus, 1873)

Una idea bastante eficaz, esta de Proclus, de caracterizar la idea euclidiana de inclinación no como un concepto abstracto sino como una relación entre entidades (líneas o planos); lo que nos permite operar matemáticamente con mayores propiedades del lenguaje. Además, advierte Proclus, para identificar un ángulo hay que decir también explícitamente no sólo qué líneas lo forman sino también la superficie sobre la cual el ángulo mismo se considera.

Proclus ha "demostrado" así que el ángulo no es ni cualidad, ni cantidad, ni relación; pero entonces, ¿cuál es la solución al problema? Volvamos a las frecuentemente mencionadas "cuatro categorías pitagóricas":

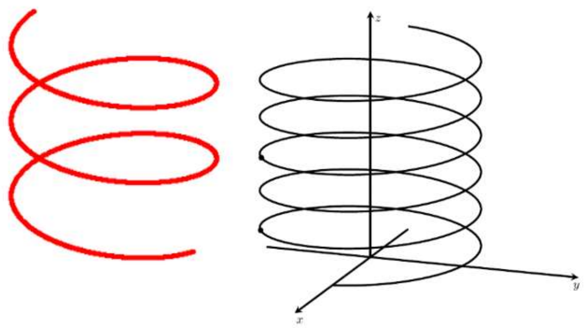
«Puesto que, por tanto, estas cosas son inciertas, y mientras Euclides llama inclinación al ángulo y Apolonio contracción de una superficie o de un sólido en un sólo punto bajo una línea quebrada o superficie, y esto parece definir todo ángulo en general, nosotros, que seguimos a nuestro maestro, debemos decir que el ángulo en sí mismo no es ninguna de las cosas dichas, sino que de la conjunción de todas estas cosas tiene su existencia y por esta razón ha llevado a la incertidumbre a quienes están tentados de dar una solución única. Así, el ángulo necesita absolutamente de la cantidad inherente a la magnitud y necesita de la cualidad según la cual posee, por así decirlo, su forma propia y el carácter de su esencia: pero también necesita, finalmente, de la disposición de las líneas que lo definen y de los planos que lo contienen. El ángulo es algo formado por todas estas cosas y no por una sola de ellas: es divisible, susceptible de igualdad y desigualdad según la cantidad que le es propia, ni está obligado a aceptar la razón de magnitudes del mismo género por el mero hecho de poseer también una cualidad particular según la cual los ángulos no suelen ser comparables los unos con los otros, ni a formar un ángulo único si sólo hay una inclinación, porque también la cantidad interpuesta entre las inclinaciones completa su sustancia» (Proclus, 1873).

Ciertamente, el hecho de que existieran entidades matemáticas (cantidades, diríamos nosotros) en cierto sentido mensurables, pero no sujetas al postulado de Eudoxo–Arquímedes, debió de trastornar la mente de un matemático de la época y obligarle a realizar vuelos pindáricos para poder meter en categorías aparentemente exhaustivas entidades que parecían quedar fuera de toda clasificación. La idea de separar claramente el concepto de ángulo rectilíneo de los demás y tratarlo por separado pugnaba por imponerse, no por razones de generalización, sino por resistencia intelectual a una idea que había nacido así y seguía proponiéndose así, por tradición, también por parte de ilustres matemáticos.

En este punto, Proclus analiza las definiciones conocidas y aceptadas en su época, las critica todas, incluida la de Euclides, y llega a la conclusión de que aún no existe una definición satisfactoria de ángulo; a continuación, distingue los ángulos sobre superficies de los ángulos sobre sólidos. Pero, para comprender esta distinción, la cuestión se complica bastante. En efecto, hay que distinguir los ángulos incluidos (sobre superficies) entre líneas simples y líneas complejas y los ángulos incluidos (sobre sólidos) entre superficies simples y superficies complejas.

Lo que se entiende por esta clasificación lo dice Proclus mismo, aceptando una definición debida a Platón que se encuentra en su formidable dialogo *Parménides*. Las dos únicas curvas simples son la recta (imagen de lo infinito) y la circunferencia (imagen de lo finito); todas las demás son mixtas y resultan de mezclas (más o menos complejas) de aquéllas. Luego hay tres movimientos: uno rectilíneo (a lo largo de una recta), uno circular (a lo largo de una circunferencia) y uno mixto (mezcla de los dos). Del mismo modo, el plano y la esfera son superficies simples y las otras mixtas (que pueden obtenerse a partir de combinaciones de esas dos). En tiempos de Platón ya se discutía la existencia de otra línea simple, la hélice circular (Figura 6), ya que sus partes son superponibles entre sí (al igual que la recta y la circunferencia).

Figura 6

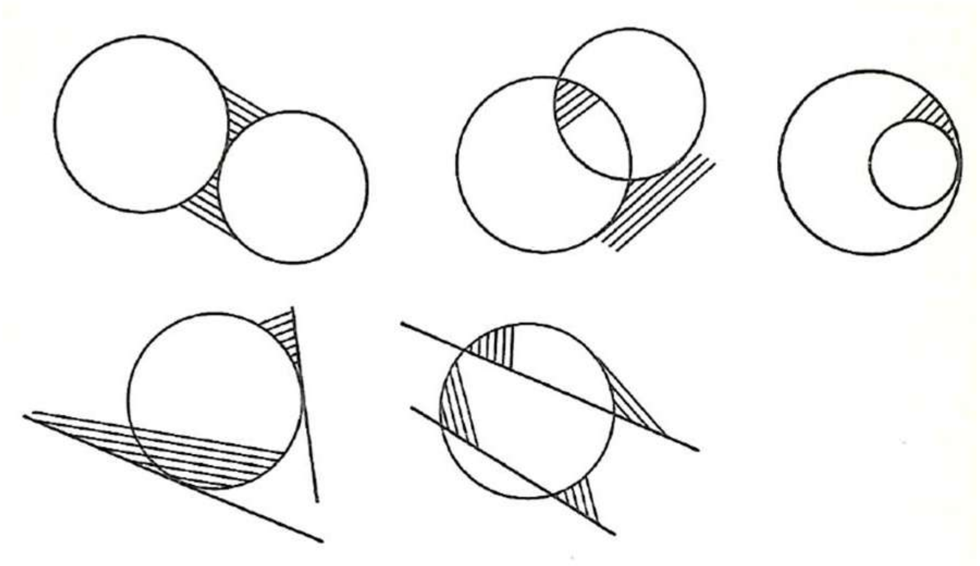


Proclus aprovecha la ocasión para ponerse del lado de Platón; según él, la hélice sí tiene esta propiedad, pero no es simple, ya que se genera por una recta que se mueve alrededor de un cilindro mientras un punto se mueve sobre la propia recta misma; la hélice es, por tanto, el resultado de dos movimientos simples y debe considerarse, por tanto, una curva mixta.

Aparte de los aspectos técnicos de los problemas planteados y recordados aquí, tenemos un ejemplo interesante del estudio de las curvas y su clasificación por los matemáticos griegos: como no disponían de geometría analítica, sólo tenían que utilizar consideraciones sintéticas.

Pero volvamos a los ángulos. Hablando de ángulos obtenidos a partir de líneas simples, Proclus clasifica los que hay entre dos circunferencias tangentes o secantes y entre una recta y una circunferencia (Figura 7).

Figura 7



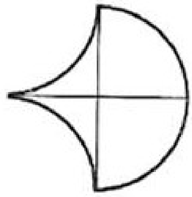
Su clasificación no aparece en los *Elementos* de Euclides, por lo que el término genérico de ángulo reservado a entidades matemáticas tan diferentes debió suscitar alguna polémica, que Proclus recoge:

> «Por tanto, el Geómetra [Euclides] define todos estos ángulos situados en superficies planas dándoles el nombre común de "ángulo plano", diciendo que su característica es la inclinación, que su locus es el plano (...) y, en cuanto a su origen, que debe haber dos líneas y no al menos tres como en el sólido y que estas deben tocarse y no estar sobre una [misma] recta, para que haya una ruptura y envolvimiento de las líneas y no sólo una extensión en una sola dirección. Parece, por tanto, que este discurso no admite que un ángulo esté formado por una sola línea; sin embargo, la línea cisoide (ver sucesivamente 1) que es una sola y el hipopede (ver sucesivamente 2) forman un ángulo: pues de hecho nosotros llamamos cisoide a toda la línea entera y no a sus partes, de modo que se puede decir que forman el ángulo convergiendo, y así también toda la spirica (ver sucesivamente 3) y no una parte de ella. Por lo tanto, ambas por sí mismas forman cada una un ángulo consigo misma y con otra – luego [parece] que al definir inclinación al ángulo [Euclides] yerra – pues ¿cómo, siendo una única inclinación, serían dos los ángulos? ¿Y cómo seguimos llamando a los ángulos iguales y desiguales, y cuántos otros argumentan contra esta opinión? En tercer lugar [parece] superfluo decir que ciertos ángulos no se encuentran en la línea recta, como los que están rodeados por líneas circulares: pues aún sin esto la definición es completa. Pues la inclinación de estas líneas entre sí mismas formará el ángulo: ya que en principio es imposible que las líneas curvas se encuentren sobre la misma recta». (Proclus, 1873)

1. La cisoide (es decir: curva en forma de hiedra) es una curva algebraica cuya definición se pierde en la antigüedad, pero que sin duda fue utilizada por Diocles (-III – -II siglo) para resolver el problema de la duplicación del cubo (Loria, 1914, p. 413). El nombre se debe a su forma. Su ecuación es la siguiente: $x^3=y^2(2a-x)$ con $x\in[0, 2a[$.

La forma de la curva muestra claramente a qué se refiere Diocles cuando dice que la curva misma forma un ángulo (Figura 8).

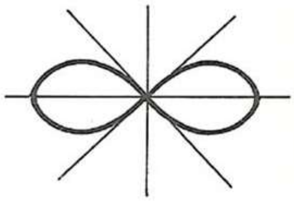
Figura 8



2. La hipopede (pata de caballo) es una curva algebraica de cuarto orden

perteneciente al gran grupo de las llamadas curvas espirales que se obtienen secando un toro (o una espiral) con un plano paralelo al eje alrededor del cual gira el círculo generador del toro (Figura 9).

Figura 9



La ecuación cartesiana de la hipopede es:

$$(x^2+y^2)^2+4b(b-a)(x^2+y^2) = 4b^2x^2, \text{ con } a, b>0.$$

El nombre proviene del hecho de que el héroe mitológico griego Perseo dio la forma de esta curva a una pista de caballos (Loria, 1914, pp. 4l6-417).

3. Aquí "spirica" es utilizada por el autor para evitar la repetición y es, por tanto, el mismo hipopede.

Dicho esto, Proclus considera el caso en el cual las líneas que incluyen el ángulo son rectas y reserva el nombre de ángulos rectilíneos a tales ángulos.

Es característico de los tratados griegos de geometría los repentinos vuelos poético que, aparte de Euclides, los matemáticos griegos gustan hacer cuando el lector menos se lo espera. Proclus no escapa a la tentación, ya que cierra la cuestión del "ángulo" (lejos de estar cerrada para nosotros) con las siguientes palabras místicas: «Afirmamos que el ángulo es el símbolo y la imagen de la coherencia en las creaciones divinas y de la disposición a unificar las cosas separadas y a hacer indivisibles las cosas divisibles y a reducir las cosas múltiples a una unión coherente» (Proclus, 1873).

Según la tradición, inmediatamente después de Proclus, la idea de ángulo plano formado por líneas de cualquier tipo perdió lentamente su importancia y sólo reapareció en argumentos menores (por ejemplo, en el Renacimiento); ya en la Edad Media, este tipo de ángulo sólo se encuentra en tratados no matemáticos, de importancia científica secundaria.

Sigue siendo de interés sólo el concepto de ángulo rectilíneo plano, y cobra fuerza la idea ya sostenida por Proclus de que el ángulo es una superficie, una superficie que está en cierto modo “encerrada” por las dos semirrectas que forman este ángulo. Aunque sea imposible decir con certeza quién fue el primero que, explícitamente, hizo tales afirmaciones, es sin embargo seguro que a partir de un momento dado (desde finales del siglo XVII aproximadamente) todos los tratados, aunque de diferentes maneras y con diferentes palabras, aceptan esta tesis, que sigue siendo dominante hoy en día. [Antoine Arnaud (1612 – 1694) utiliza ciertamente este limitante en 1667] (Arnaud, 1667).

Justo a finales del siglo XIX, en 1899, David Hilbert publicó su famosa obra *Fundamentos de geometría*, que pretendía reescribir los *Elementos* de Euclides respetando su estructura, pero de una forma más moderna. Puede resultarnos interesante ver cómo considera y trata Hilbert los ángulos:

> «Sea α un plano cualquiera y h, k dos semirrectas distintas en α, con origen en el mismo punto O, que pertenecen a rectas diferentes. Llamamos ángulo al sistema de estas dos semirrectas h, k y lo denotamos por ∢(h, k), o por ∢(k, h). Las semirrectas h, k se llaman lados del ángulo y el punto O se llama vértice del ángulo.
>
> Los ángulos planos y cóncavos quedan excluidos de esta definición». (Hilbert, 1899)

Hay que evidenciar que por ángulo Hilbert entiende el “sistema de dos semirrectas distintas”, cualquiera cosa que sea, nada que ver con “la parte de plano comprendida entre ellas”, como decimos hoy; y que, no sólo se excluyen los ángulos planos y cóncavos (que curiosamente se nombran como si fueran entidades ya definidas), sino también los ángulos nulos, ya que las semirrectas *h*, *k* deben ser distintas.

Sería además muy complejo definir lo que es la amplitud de un ángulo.

Así pues, sí, se trata de un gran paso adelante en el plano de la lógica moderna; pero, como vemos, esta postura del genial Hilbert, quizá el mayor matemático de todos los tiempos, nos muestra de forma concluyente que la idea de ángulo es muy compleja y diversamente discutible.

Reflexiones finales

Sólo una reflexión final de carácter didáctico.

A veces nuestros alumnos, especialmente los de los primeros años de escolarización, tienen dificultades con el tema “ángulos” por diversos motivos. Para un profesor que obviamente es matemáticamente culto, esto puede parecer inconcebible. Pero la investigación en Didáctica de la matemática nos enseña que las dificultades de los estudiantes son en ocasiones escondidas y complejas (D'Amore, 1999; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani & Sbaragli, 2010).

La historia nos advierte de manera específica que la idea de ángulo no es tan trivial como podría parecerle a un adulto culto, ¡todo lo contrario! Durante milenios, las mentes más ilustres han debatido sobre este término, interpretándolo de maneras muy diferentes y con aspectos que hoy nos parecen incluso triviales. Así pues, la historia nos enseña a evaluar y juzgar las dificultades de nuestros alumnos con ojos críticos.

Es evidente que se trata de un obstáculo epistemológico (D'Amore, 1999; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2018).

Nos hemos dedicado aquí a la evolución histórica de la idea de ángulo, pero se pueden hacer consideraciones similares para casi todos los términos, incluso los más elementales, de la matemática.

Referencias bibliográficas

Arnaud, A. (1667). **Nouveaux éléments de géometrie**. Lyon: C. Savreux.

Carruccio, E. (1972). **Matematiche elementari da un punto di vista superiore**. [A cura di B. D'Amore]. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (1981). Cenni storici sul concetto di «grandezze non archimedee». **Cultura e scuola,** 79, 237-246.

D'Amore, B. (1985). L'idea di 'angolo' nell'antichità e sua evoluzione. **La matematica, le scienze e il loro insegnamento***, 22*(1), 6-18.

D'Amore, B. (1999). **Elementi di Didattica della Matematica**. Bologna: Pitagora. (D'Amore, B. (2006). **Didáctica de la Matemática**. Bogotá: Editorial Magisterio). (D'Amore, B. (2007). **Elementos da Didática da Matemática**. São Paulo: Livraria da Física).

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I., Marazzani, I., & Sbaragli S. (2010). **La didáctica y la dificultad en matemática**. Bogotá: Magisterio. (D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2019). **Le difficoltà di apprendimento in matematica. Il punto di vista della didattica**. Bologna: Pitagora).

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani I., & Sarrazy, B. (2018). **El contrato didáctico en Educación Matemática**. Bogotá: Magisterio. (D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2020). **Gli effetti del contratto didattico in aula**. Bologna: Pitagora).

Enriques, F. (1925). **Gli elementi di Euclide e la critica antica e moderna**. Roma: Stock.

Euclide (1883). **Opera omnia**. (A cura di I. L. Heiberg e H. Menge). Lipsia: Teubner.

Hilbert, D. (1899). **Grundlagen der Geometrie**. Leipzig: Teubner.

Klein, F. (1924), **Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.** Berlino: Springer.

Loria, G. (1914). **Le scienze esatte nell'antica Grecia**. Milano: Hoepli.

Mugler, C. (1958). **Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs**. Paris: Gauthier-Villars.

Proclo Diadoco (1873). **Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii.** (A cura di G. Friedlein). Lipsia: Teubner.

Ver Eecke, P. (1883). **Proclus de Lycie.** Bruges: Desclée de Brouwer.

Zeuthen, H. (1912). **Geschichte Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter**. Lipsia: Teubner.

Agradecimientos. Los autores agradecen a los árbitros por las pertinentes sugerencias recibidas.